2. 空间中曲线与曲面的表达，~~(例子)~~.

(2) 描述它们的运动

当我们把星球看成一个质点时，它的运动轨迹则将在 E^3 中划过一条曲线；当我们把它看成一个线段时，则其运动轨迹扫成一个曲面；而事实上，它的运动轨迹应该是一个"三维"的几何物体.

"曲面"在生活中无处不在：它们往往以一个刚体的表面这样一个形式出现. 如何描述它们（以数学定义的方式）？

以下这个定义在绝大多数情况是足够的.

定义：（曲面/曲线）

对 $X \subset \mathbb{R}^3$，我们称 X 为曲面（曲线），若 $\forall$ 点 $x \in X$，~~$\exists \varepsilon > 0$~~ $\exists x \in V \overset{开}{\subset} \mathbb{R}^3$ ~~(ε 可为无穷)~~，使得 $X \cap V$ ~~$X \cap B_x(\varepsilon)$~~ 同胚于 $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^1$) 中的某一连通开集 U.

~~$\{y \mid y - x \mid \varepsilon\}$~~

这里同胚是指：$\exists\ r: U \longrightarrow X \cap V \subset \mathbb{R}^3$

$U \subset \mathbb{R}^2$ (或 $\mathbb{R}^1$)

u-v 坐标　　t-坐标

x, y, z-坐标

$$r(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))$$ 或

$$r(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$$

满足：

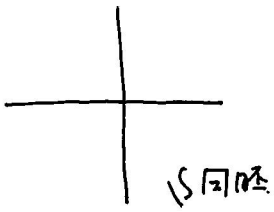
(1) r：是 U 到 $X\cap \overset{V}{\cancel{B_\varepsilon(\xi)}}$ 的双射

(2) r 是连续映射（即 x, y, z 分量为 U 上连续函数）

(3) $\sigma = r^{-1}$ 也是连续映射.（即 r 是开映射：$\forall W \overset{\text{开集}}{\subset} U$, $\forall y \in r(W) \subset X$, $\exists \eta > 0$, s.t $B_y(\eta) \cap X \subset r(W)$.）

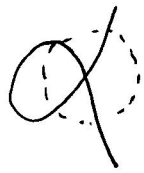
什么样的"曲面/曲线"不在我们上述定义之内？

例子：



同胚 $\not\cong$ $U \underset{\text{开集}}{\subset} \mathbb{R}^1$

或者



即有自交的曲线不在上述定义之列.

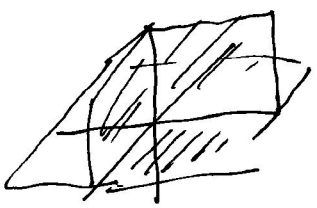
证明（直观）：

U 必是形如 (a, b)，（因为左边是连通的）

但是若除掉左边图中交叉点，我们不得到 4 个连通分支，但 U 除掉一点只得到 2 个连通分支。故左边图形不同胚于任一开集 $U \subset \mathbb{R}^1$.

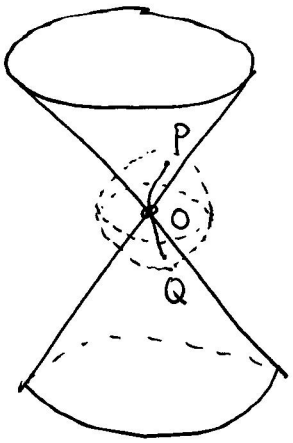
#

类似：

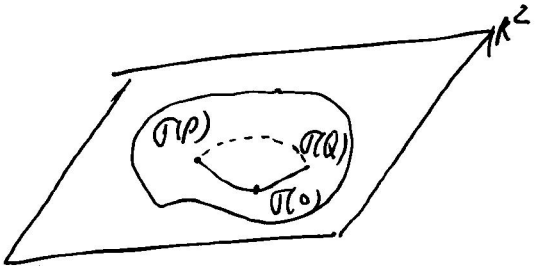


同胚 $\not\cong$ $U \overset{\text{开集}}{\subset} \mathbb{R}^2$

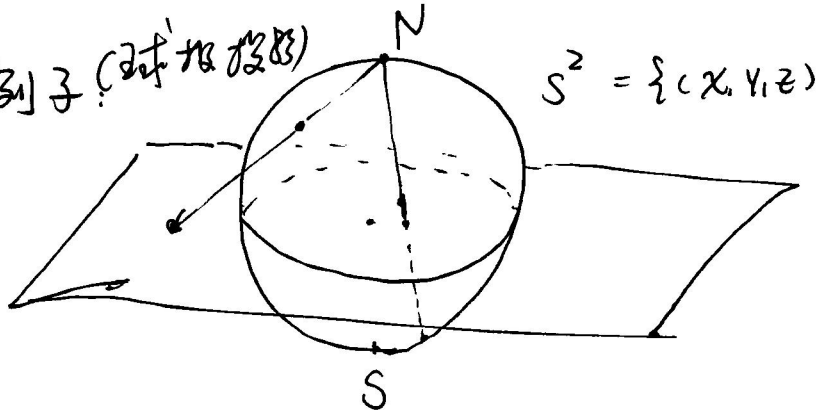
例子：



同胚 开集
$\simeq U \subset \mathbb{R}^2$



例子（球极投影）



$S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

$N = (0,0,1)$

考察从 N 射出的射线，与球面上除 N 点外任意一点，与平面上某点.

即给定 $(x_0,y_0,z_0) \in S^2$，$(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,1)$，确定直线

$$L_{NX_0} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x-0,\ y-0,\ z-1) = t\cdot(x_0-0,\ y_0-0,\ z_0-1),\ t\in\mathbb{R} \right\}$$

$$L_{NX_0} \cap \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\{z=0\}} = \left(\frac{x_0}{1-z_0}, \frac{y_0}{1-z_0}\right).$$

类似. $S=(0,0,-1)$

$$L_{SX_0}\cap\mathbb{R}^2=\left\{\frac{x_0}{1+z_0},\ \frac{y_0}{1+z_0}\right\}.$$

我们定义：

$$r^+:\ \mathbb{R}^2\longrightarrow S^2\setminus\{S\}\subset\mathbb{R}^3$$

$$(u,v)\longmapsto\left(\frac{2u}{1+u^2+v^2},\ \frac{2v}{1+u^2+v^2},\ \frac{1-(u^2+v^2)}{1+u^2+v^2}\right)$$

$\ulcorner$ $u=\frac{x}{1+z}$, $v=\frac{y}{1+z}$

$\Rightarrow x=(1+z)\cdot u$, $y=(1+z)v$

$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow (1+z)^2u^2+(1+z)^2v^2+z^2=1$

$\Leftrightarrow (1+z)(u^2+v^2)=1-z$

$\Rightarrow z=\dfrac{1-(u^2+v^2)}{1+u^2+v^2}$ $\lrcorner$

及

$$r^-:\ \mathbb{R}^2\longrightarrow S^2\setminus\{N\}\subset\mathbb{R}^3$$

$$(u,v)\longmapsto\left(\frac{2u}{1+u^2+v^2},\ \frac{2v}{1+u^2+v^2},\ \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2}\right)$$

习题：验证 r^+ 及 r^- 是同胚. 由于 $S^2=(S^2\setminus\{S\})\cup(S^2\setminus\{N\})$

故 S^2 是二个满足上述定义的曲面.

曲面的更多例子:

(1) 图:

设 $f: \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{U}} \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ 函数.

则 $\Gamma_f = \{(u,v, f(u,v)) \mid u,v \in U\} \subset \mathbb{R}^3$ 为曲面.:

$$\begin{array}{rccc} r: & U & \longrightarrow & \Gamma_f \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (u,v) & \longmapsto & (u,v,f(u,v)) \end{array}$$

(1) r 为连续双射

$r^{-1}(x,y,z) = (x,y)$ 亦是连续的.

故 r 为同胚.

(2) 显然 r 各个分量, 特别是 z-分量是 $f(u,v)$ 为 (u,v) 的 C^∞ 函数.

(3) $$r_u \wedge r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_u = \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & f_v = \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$= (-f_u, -f_v, 1) \neq 0,$$ 因为最后一个分量恒不为0.

(2) 方程定义的函数的层曲面.

设 $F: U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, C^∞ 函数

$\forall\, c \in \mathbb{R}$, 令

$$L_c \triangleq F^{-1}(c) = \{(x,y,z) \in U \mid F(x,y,z) = c\}$$

若 $\forall P \in L_c$, $\nabla F(P) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P)\right) \neq 0$.

则 L_c 是一曲面.

事实上: 不妨假设 $\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \neq 0$, 则由隐函数定理, 知

函数 $G = F - C : U \longrightarrow \mathbb{R}$ 在零点的邻域

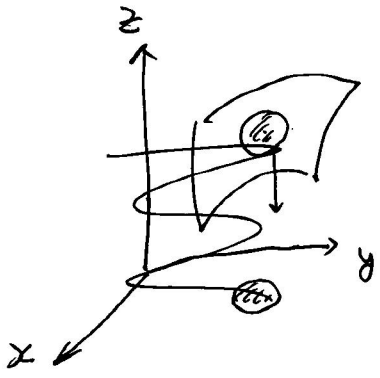
$G(x,y,z) = 0$ 在 P_0 的邻域内解可表为

$$\{(x,y,g(x,y)) \mid (x,y) \in U \subset \mathbb{R}^2\}$$

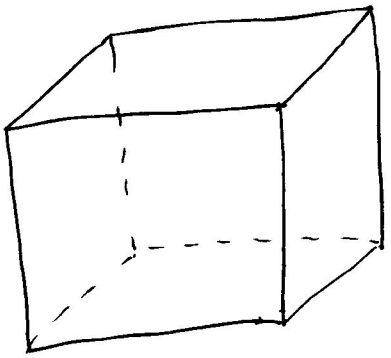
其中 $g(x,y)$ 为 (x,y) 的 C^∞ 函数 (即: $\frac{\partial G}{\partial z}(P_0) = \frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \neq 0 \Rightarrow G(x,y,g(x,y)) \equiv 0$ 在 P_0 的某个邻域)

故 L_c 在 P_0 附近是 C^∞ 函数 g 的图. 故由像引知, L_c 为曲面。

投影与参数化:



考察：



同胚 $\cong S^2$

我们希望，把棱边和尖角磨掉，成一光滑的表面。（即没有奇点）

事实上，我们希望我们研究的曲面（曲线）上任意一点无穷小附近都是差不多的。用数学来表达，即任意一点附近，均可由一个线性平面（直线）来近似。故引进

定义（光滑曲面/曲线）

在上述曲面/曲线的定义中，我们进一步要求

(1) 曲面情形：

$\{x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\}$ 为 (u,v) 的光滑向量函数，即

$r_u \triangleq \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$，$r_v \triangleq \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$ 是定义好的

向量函数，及

$r_{uu} \triangleq \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)$，$r_{uv} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right)$

$r_{vu} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}, \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}, \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\right)$，$r_{vv} = \left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$

是定义好的，及 ---

曲线情形：

$\{x(t), y(t), z(t)\}$ 为 t 的光滑向量函数. 即

$r_t = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ 为~~定义~~好的(关于t的)向量函数, 且

$r_{tt} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right)$ 为 - - - - 且

- - -

(2) 曲面情形：

r_u 与 r_v 点点向量无关.

即 $r_u \times r_v \neq 0$, $\forall (u,v) \in U$.

曲线情形：

$r_t \neq 0$, $\forall t \in U$.

(注意：$r_t \neq 0 \iff \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ 三个函数不同时为0)

定义：(切面/切线)

设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 为一光滑曲面. $r: U \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ 如上述定义.

$(u_0, v_0) \longmapsto x$

则平面：$T_x S \triangleq \{ r(u_0, v_0) + u \cdot r_u(u_0, v_0) + v \cdot r_v(u_0, v_0) \mid u, v \in \mathbb{R} \}$

为 S 在点 x 处的切平面.

类似：设 $C \subset \mathbb{R}^3$ 为一光滑曲线, 则直线

$r: U \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^3$

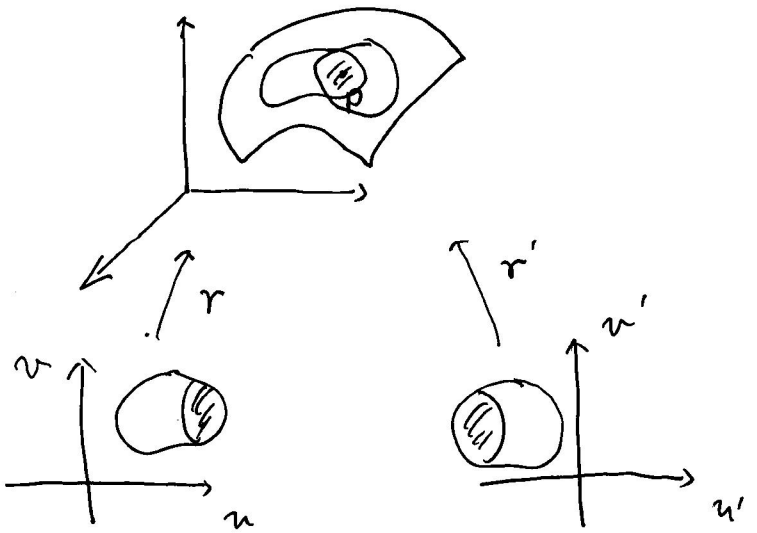
$t_0 \longmapsto x$

$T_{x_0}C \triangleq \{r(t_0) + t\cdot r_t(t_0) \mid t\in\mathbb{R}\}$ 为 C 在点 x_0 处的切线.

习题：验证 S^2 为光滑曲面，并求出给定点 $x\in S^2$ 的切平面方程。

在本课中，我们假定曲面(线)均为光滑曲面(线).

曲面的参数化：



定义：设 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为曲面，则由曲面定义：

$$\forall x\in S,\ \exists r: \underset{\cap}{U} \longrightarrow S\cap V\subset\mathbb{R}^3, \text{ 使之等.}$$
$$\mathbb{R}^2$$

(1) r 是同胚, $x\in r(U)$.

(2) $r(u,v)=(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ 光滑的实数

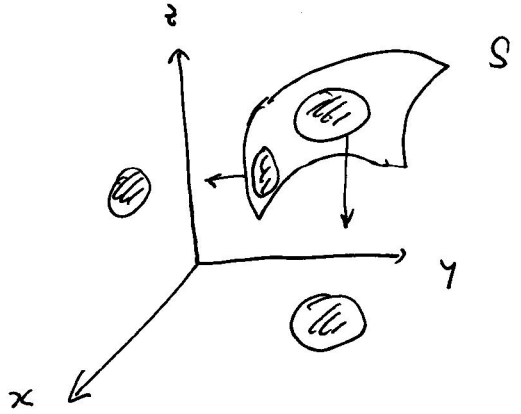
(3) $r_u\wedge r_v\neq 0,\ \forall (u,v)\in U.$

我们称 (U, r) 为曲面在点 x 附近的一个参数化；

记 $V_x = S \cap V$, $\varphi = r^{-1}: V_x \to U \subset \mathbb{R}^2$

称 (V_x, φ) 为曲面在点 x 处的一个局部坐标系.

投影与参数化：



记 P_z 为 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 为沿着 z 轴向 xy 平面的投影；类似地有 P_x, P_y.

$$(x, y, z) \mapsto (x, y)$$

设 $S \subset \mathbb{R}^3$ 为一曲面，则 $\forall p \in S$，存在 p 的某个邻域 V_p，使得

(V_p, P_x), (V_p, P_y) 或 (V_p, P_z) 为曲面 S 在 p 处的一个局部坐标系.

等价于：曲面 S 在局部是一个图.

记明：令 $r: U \to S$ 为 p 附近的一个参数化。

$$r_u(p) \wedge r_v(p) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_u(p) & y_u(p) & z_u(p) \\ x_v(p) & y_v(p) & z_v(p) \end{bmatrix}$$ 有一个 2×2 子式在 p 处不等于 0.

不妨设

$$\det\begin{pmatrix} x_u(p) & y_u(p) \\ x_v(p) & y_v(p) \end{pmatrix} \neq 0$$

因为 $\det\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}$ 是 (u,v) 上的连续函数，

所以 $\exists\, U' \overset{\text{开}}{\subset} U$, s.t $p \in \gamma(U')$, 且 $\forall\, p' \in \gamma(U')$

$$\det\begin{pmatrix} x_u(p') & y_u(p') \\ x_v(p') & y_v(p') \end{pmatrix} \neq 0$$

考察复合映射：

$$\begin{array}{ccccc} U' & \xrightarrow{\gamma} & S & \xrightarrow{P_z} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (u,v) & \longmapsto & (x,y,z) & \longmapsto & (x,y) \\ p & \longmapsto & p & \longmapsto & q \end{array}$$

记 $f = P_z \circ \gamma : U' \longrightarrow \mathbb{R}^2$, Jacobian 矩阵

$J(f) = \det\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}$ 在 p 处可逆.

由反函数定理，知 $\exists\, V' \subset \mathbb{R}^2$ 开集，及光滑映射

$$g : V' \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{s.t} \qquad \begin{array}{c} U' \\ \| \\ U \end{array}$$

(1) $q \in V'$ (2) $g(q) = p$ (3) $g(V') \subset U$

(4) $g(V') \subset \mathbb{R}^2$ 开集. (5) $f \circ g \equiv id$ on V'

故可定义映射

$$r' = r\circ g : V' \xrightarrow{g} U' \xrightarrow{r} S$$

$$(x,y) \longmapsto (x,y,z(x,y))$$

~~[illegible]~~ 则易验证得：

r' 为点P附近的一个参数化。 #

特别得，这个证明也说明了光滑曲面局部是一个图。 #

习题：在曲面局部参数化的定义中，可将(1)改为 r 是双射。

定义：(曲面片/曲线段)

$S\subset\mathbb{R}^3$ (或 $C\subset\mathbb{R}^3$) 为 $\mathbb{R}^3$ 中一曲面(曲线)。我们称之为一曲面片(曲线段)，若在 S (C) 的局部参数化中，可取到 U 为整个 S (C)。

即：曲面片：$\exists\, r: U \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$

(1) r 同胚 (⇔双射)

(2) r 为光滑向量函数

(3) $r_u \wedge r_v \neq 0$, $\forall (u,v)\in U$.

曲线段：$\exists\, r: U \longrightarrow C \subset \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$

(1) r 同胚

(2) r 光滑向量函数

(3) $r_t \neq 0$, $\forall t\in U$

命题：$S\subset\mathbb{R}^3$，曲面片，~~T~~ 切平面 $T_pS\subset\mathbb{R}^3$ 不依赖于局部参数的选取.

证明：设 $r: U\longrightarrow S\subset\mathbb{R}^3$

$r': U'\longrightarrow S\subset\mathbb{R}^3$

对点 $P\in S$ 附近的两个参数化.

设 $r(U)\cap r(U')\triangleq V_p\subset S$

令 $U_p=r^{-1}(V_p)$，$U'_p=r'^{-1}(V_p)$.

~~命~~题：$\varphi\triangleq r'^{-1}\circ r$：

$$\begin{array}{ccccc} U_p & \xrightarrow{r} & V_p & \xrightarrow{r'^{-1}} & U'_p \\ \cap & & & & \cap \\ \mathbb{R}^2 & & & & \mathbb{R}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (u,v) & & \longmapsto & & (u',v') \end{array}$$

利用反函数定理，证明 φ 是光滑向量函数。

同理 $\psi=\varphi^{-1}=r^{-1}\circ r'$ 也是光滑向量函数。

设 $r(p)=P=r'(p')=$ ，则有关系式：$(r'=r\circ\psi)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} r'_{u'} \\ r_{v'} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u'} \\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}}_{J(\psi)} \begin{pmatrix} r_u \\ r_v \end{pmatrix}$$

#

曲面/曲线的拉伸几何问题 = 分类问题：(另一拉伸问题 = 存在性问题)

我们课程分类的主要对象是曲面片/曲线段.（即局部曲面/线的分类理论）

问题一：

定义：设 $r: \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{U}} \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$，$r': \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{U}} \longrightarrow S' \subset \mathbb{R}^3$

为两曲面片.

称 $r \overset{\text{全等}}{\cong} r'$，若 $\exists\, T \in O(3) \ltimes \mathbb{R}^3$，s.t

$$r' = T \circ r$$，即

类似定义两曲线段的全等.

问题：如何判定两曲面片/曲线段全等？

有相同参数空间

问题二（要地图问题）

令 $S \subset S^2$ 为一曲面片，能否将 S 等距离换到 $U \subset \mathbb{R}^2$？

即我们希望得到一个地图册，使得地图册上两点的距离忠实反映地球上两点的距离（或一固定比例）. 我们能否做到？

问题：如何判定两有相同参数空间的曲面/曲线都存在等距变换？

注意：问题-5问题二的区别：

